EPFL - Semestre d'Automne 2017-2018	J. Scherer
Algèbre Linéaire	**Questions personnelles**
Microtechnique	

Question A (4 points). Soit A une matrice symétrique.

(a) (1 point) Que dit le Théorème spectral ? Dire explicitement ce que cela signifie pour une matrice d'être orthodiagonalisable.

J'aimerais voir ici au moins : une matrice est orthodiagonalisable (ou de manière équivalente : diagonalisable par un changement de base orthonormé) si et seulement elle est symétrique, ce qui signifie explicitement qu'il existe une matrice U orthogonale telle que UAU^T est diagonale. Le théorème spectral dit encore que toutes les valeurs propres sont réelles et que deux espaces propres distincts sont orthogonaux.

(b) (3 points) Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de la matrice A. Montrer que les espaces propres E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Soit v un vecteur propre de E_λ et w un vecteur propre de E_μ. On doit montrer que $v \perp w$. Pour cela on calcule le produit scalaire

$$\begin{aligned}
\lambda v \cdot w &= Av \cdot w \text{ car } v \in E_\lambda \\
&= (Av)^T w \text{ par définition du produit scalaire} \\
&= v^T A^T w \text{ par une propriété de la transposition} \\
&= v^T A w \text{ car } A \text{ est symétrique} \\
&= v^T (\mu w) \text{ car } w \in E_\mu \\
&= v \cdot (\mu w) \text{ par définition du produit scalaire} \\
&= \mu v \cdot w
\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda v \cdot w = \mu v \cdot w$ ou encore $(\lambda - \mu) v \cdot w = 0$ Comme $\lambda \neq \mu$ par hypothèse on conclut que $v \cdot w = 0$, les deux vecteurs sont orthogonaux.

Question B (14 points). Dans cet exercice W est le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) (3 points) Construire une base orthonormée de W.

Puisque les deux vecteurs proposés ne sont pas orthogonaux, on Gram-Schmidte.

Pour calculer la projection orthogonale de $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur la droite engendrée par $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on a besoin de

— le produit scalaire $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=1$

— la norme au carré de $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ qui vaut 2

— la formule $\frac{u\cdot v}{||u||^2}u=\begin{pmatrix}-1/2\\0\\0\\1/2\end{pmatrix}$ pour la projection orthogonale

— la formule de Gram-Schmidt $v-\mathrm{proj}_u v=\begin{pmatrix}-1/2\\1\\1\\-1/2\end{pmatrix}$

Pour terminer il faut normaliser ces vecteurs (1 point) pour obtenir par exemple la base

$$\left(\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\0\\0\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sqrt{10}/10\\\sqrt{10}/5\\\sqrt{10}/5\\-\sqrt{10}/10\end{pmatrix}\right)$$

En Gram-Schmidtant dans l'autre sens on trouverait

$$\left(\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\sqrt{15}/15\\-\sqrt{15}/15\\-\sqrt{15}/15\\\sqrt{15}/5\end{pmatrix}\right)$$

(b) (1 point) Calculer la matrice $B=A^TA=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\2&1&1&2\end{pmatrix}$.

(c) (3 points) Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de la matrice $B=A^TA$.

On calcule $c_B(t)=\det(B-tI_4)=\begin{vmatrix}2-t&1&1&2\\1&1-t&0&1\\1&0&1-t&1\\2&1&1&2-t\end{vmatrix}$.

On effectue maintenant des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, par exemple C1 - C4 et C2 -C3 :

$$c_B(t)=\begin{vmatrix}-t&0&1&2\\0&1-t&0&1\\0&t-1&1-t&1\\t&0&1&2-t\end{vmatrix}=t(t-1)\begin{vmatrix}-1&0&1&2\\0&-1&0&1\\0&1&1-t&1\\1&0&1&2-t\end{vmatrix}$$

On a utilisé la linéarité du déterminant comme fonction d'une colonne et on continue avec de nouvelles opérations, par exemple L4 + L1 et L3 + L2

$$c_B(t) = t(t-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4-t \end{vmatrix} = t(t-1)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 4-t \end{vmatrix}$$

On a enfin développé selon la première colonne, puis la deuxième. On termine le calcul

$$c_B(t) = t(t-1)(t^2 - 5t + 4 - 4) = t^2(t-1)(t-5)$$

(d) (3 points) Identifier les espaces propres de B sachant que le vecteur $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B, et en utilisant la partie (a).

1. On sait que $E_0 = \mathrm{Ker} B$ est de dimension 2, on devine donc qu'il s'agit de W. De fait, deux opérations sur les lignes permettent de voir que

$$E_0 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = W$$

Puisqu'un vecteur propre nous est donné, calculons $Bw = 5w$ (0.5 point) si bien que $E_5 = \mathrm{Vect}\{w\}$. Enfin il faut calculer, à l'aide de quelques opérations élémentaires pour échelonner et réduire :

$$E_1 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

(e) (1 point) Calculer une base orthonormée de vecteurs propres de B.

On a déjà une base orthonormée de W, il ne reste plus qu'à normaliser les vecteurs qui engendrent E_1 et E_5. Ainsi

$$\left(\begin{pmatrix} \sqrt{10}/5 \\ \sqrt{10}/10 \\ \sqrt{10}/10 \\ \sqrt{10}/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{10}/10 \\ \sqrt{10}/5 \\ \sqrt{10}/5 \\ -\sqrt{10}/10 \end{pmatrix}\right)$$

(f) (3 points) Calculer les matrices U, V et Σ de la décomposition en valeurs singulières $U\Sigma V^T$ de la matrice A.

La matrice V est simplement formée en plaçant la base orthonormée ci-dessus dans les colonnes :

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{10}/5 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{10}/10 \\ \sqrt{10}/10 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{10}/5 \\ \sqrt{10}/10 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{10}/5 \\ \sqrt{10}/5 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{10}/10 \end{pmatrix}$$

La matrice Σ a la même taille que A et on place les valeurs singulières dans la diagonale :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin pour calculer U on doit calculer

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

si bien que la première colonne de U est $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ (0.5 point). De même pour E_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si bien que la deuxième colonne de U est $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ (0.5 point). Au final

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$